代数幾何学シンポジウム記録
2007年度　pp.101-106

ARCS AND VALUATIONS
–SOME FINITENESS PROPERTIES–

石井志保子 SHIHOKO ISHII (東京工業大学)
JOINT WORK WITH TOMMASO DE FERNEX AND LAWRENCE EIN

Abstract. The talk was based on the joint work [DEI]. It shows a finiteness property of a divisorial valuation in terms of arcs. First we show that every divisorial valuation over an algebraic variety corresponds to an irreducible closed subset of the arc space. Then we define the codimension for this subset and give a formula of the codimension in terms of "relative Mather canonical class". By using this subset, we prove that a divisorial valuation is determined by assigning the values of finite functions. We also have a criterion for a divisorial valuation to be a monomial valuation by assigning the values of finite functions.

Introduction

このノートではアファイン多様体上の弧空間の上のある種の既約閉集合とその多様体上の因子（あるいは因子的附値）との対応を構成する．この対応は 1 対 1 であり，閉集合を決定すれば因子的附置も決定される．そして因子的附値が有限個の関数の値を指定することによって決定されることを示す．さらに因子的附値が toric 附値になるための条件を紹介する．これもまた有限個の関数の値を指定することで得られる．この様に述べると，因子的附値に付随する次数付き環が必ずしも有限生成にならないことをご存知の読者は奇異に感じられるかもしれないが，附値に対応する，弧空間の上記の既約閉集合が，有限個の値を指定することによって決定される，したがってそれに対応する附値も決定されるということである．

1. 弧と弧空間

$X = \operatorname{Spec} A$ を $\mathbb{C}$ 上のアファイン多様体とする．まずは X 上の弧を定義する．

Definition 1.1. $K \supset \mathbb{C}$ を拡大体とする．K-morphism $\alpha : \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]] \to X$ を X の弧と呼ぶ．特に K を特定したい場合には K-弧と呼ぶ．$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]]$ は 2 つの点から構成されているが 生成点 を η, 閉点 を 0 で表す．異なる K に対しても同様の記号を用いる．

このような弧全体はスキームの構造を持つ、もっと正確に言えば弧の族の fine moduli scheme が存在する．

Proposition 1.2. $\mathbb{C}$ 上のアファインスキーム X に対して（必ずしもネーター的でない） $\mathbb{C}$-スキーム X_∞ が存在して、任意の $\mathbb{C}$-スキーム Z に対して次の同形が成立する：

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(Z, X_\infty) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(Z \widehat{\times}_{\operatorname{Spec} \mathbb{C}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}[[t]], X)$$

ここで $Z\widehat{\times}_{\operatorname{Spec} k}\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t]]$ は $Z\times_{\operatorname{Spec} k}\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t]]$ を $Z\times_{\operatorname{Spec} k}\{0\}$ に沿って完備化したものである．

特に $Z=\operatorname{Spec} K$ とすれば

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Spec} K, X_\infty)\simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Spec} K[[t]], X)$$

となるので，X_∞ の K-値点 は K-弧であることがわかる．これによって対応する X_∞ の点と弧を同じ記号 (α などのギリシア文字）で表すことにする．

Definition 1.3. $\pi_X : X_\infty \to X$ を $\alpha\mapsto\alpha(0)$ （ただし 0 は上記で約束したように $\operatorname{Spec} K[[t]]$ の閉点）で定義するとこれは $\mathbb{C}$-morphism になる．これを標準的射影と呼ぶ．

Remark 1.4. $Z\subset X$ を 部分多様体とすると $Z_\infty\subset X_\infty$ 部分スキームとなる．特に $Z\subset X$ が開部分多様体ならば $Z_\infty=\pi_X^{-1}(Z)$ となる．しかし $Z\subset X$ が閉部分多様体ならば $Z_\infty\subsetneq\pi_X^{-1}(Z)$ である．

Definition 1.5. 弧 $\alpha:\operatorname{Spec} K[[t]]\to X$ が thin であるとは，ある閉部分多様体 $Z\subsetneq X$ が存在して，α が Z を経由して分解することである．これは α が Z の弧であるということと同値である．

弧 $\alpha:\operatorname{Spec} K[[t]]\to X$ が thin でないときに，fat であるという．これは $\alpha(\eta)$ が X の生成点であることと同値である．またこれは α に対応する環準同形 $\alpha^*: A\to K[[t]]$ が単射であることと同値である．

X_∞ の既約な閉部分集合 C に対し，その生成点が fat であるときに，C は fat であるという．

Example 1.6. X が非特異のとき任意の既約閉部分集合 Z に対して $\pi_X^{-1}(Z)$ は fat である．

fat な閉部分集合 $C\subset X_\infty$ に対して離散附値を対応させることができる．

Definition 1.7. C を fat 集合 $\alpha\in C$ を生成点とすると

$$\alpha:\operatorname{Spec} K[[t]]\to X$$

に対応する環準同形 α^* は単射なので，商体の準同形

$$\alpha^*: K(X)\to K((t))$$

にまで拡張される．これにより，$f\in K(X)\setminus\{0\}$ に対して

$$v_C(f)=v_\alpha(f):=\operatorname{ord}_t\alpha^*(f)$$

と定義する．これにより v_C は X の有理関数体 $K(X)$ 上の離散附値となる．

Definition 1.8. fat な集合 C が因子的であるとは，対応する附値が因子的附値、すなわち X の特異点解消 $\varphi: Y\to X$ と Y 上の因子 E が存在して $v_C=q\cdot\operatorname{val}_E$ となることである．ただし val_E は因子 E に付随した附値，q は正整数である．

2. 極大因子的集合

任意の因子的附置 v に対し，[I3] において次のような fat 集合 W が存在することが示されている．

(a) $v_W = v$
(b) $v_C = v$ なる fat 集合 C は $C \subset W$ をみたす．

このような W を v の極大因子的集合と呼び $W(v)$ と表す．

これにより、次の全単射が得られる．

$$\{ \, K(X) \text{ の因子的附値} \, \} \simeq \{ \, X_\infty \text{ の極大因子的集合} \, \}$$

これにより，極大因子的集合を決めれば、因子的附置が決まる．極大因子的附値を決めるために接触軌跡を定義しよう．

Definition 2.1. 閉部分スキーム $Z \subset X$ に対して q-次接触軌跡 $\mathrm{Cont}^q(Z)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Cont}^q(Z) = \{\alpha \in X_\infty \mid \operatorname{ord} \alpha^*(I_Z) = q\},$$

ただし I_Z は $Z \subset X$ の定義イデアルを表す．また、これを $\mathrm{Cont}^q(I_Z)$ と表すこともあり，特に $I_Z = (f)$ の場合，$\mathrm{Cont}^q(f)$ と表すこともある．fat な弧 $\alpha \in X_\infty$ に対し，$\alpha \in \mathrm{Cont}^q(f)$ ということは $v_\alpha(f) = q$ （つまり関数 f の α による附値の値が q) ということと同値である．

Proposition 2.2. $\varphi : Y \to X$ を特異点解消とし，$E \subset Y$ を素因子とすると，因子的附値 $q \cdot \mathrm{val}_E$ の極大因子的集合 は次のように表される：

$$W(q \cdot \mathrm{val}_E) = \overline{\varphi_\infty \, \mathrm{Cont}^q(E)}$$

ここで $\varphi_\infty : Y_\infty \to X_\infty$ は φ から得られた射である．

Theorem 2.3. v を $X = \operatorname{Spec} A$ 上の因子的附値とする．このとき有限個の関数 $f_1, f_2, \ldots, f_m \in A$ が存在し，$v_i = v(f_i)$ とすると

$$W(v) = \overline{\bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Cont}^{v_i}(f_i)}$$

が *thin* 集合を法として成立する．

この定理は因子的附値 v が有限個の関数 $f_1, f_2, \ldots, f_m \in A$ の値 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ を指定することによって決定されることを表している．この定理の系として以下の結果を得る．

Corollary 2.4. v を $X = \operatorname{Spec} A$ 上の因子的附値とする．このとき有限個の関数 $f_1, f_2, \ldots, f_m \in A$ が存在し，$v_i = v(f_i)$ とすると

$$v(f) = \min\{v'(f) \mid v' \text{ は } v'(f_i) = v_i \text{ なる因子的附値} \, \}$$

これは toric 多様体上の toric 因子の場合の拡張になっている．因子的附値の次数付き環が有限生成でない例をご存知の読者は「有限個の関数の値を決めれば因子的附値が決まる」という標語に違和感を覚えられるかと思う．この例についてどんな関数の値を決めれば因子的附値が決まるかを見てみよう．

Example 2.5 (因子的附値の次数付き環が有限生成でない例 [CGP])．まずは V. Cossart, C. Galindo, O. Piltant による例を構成しよう ([CGP])．R を３次元正則局所環とする．次のようにして得られた因子的附値 v に対して次数付き環 $gr_vR = \oplus_m R_{\geq m}/R_{\geq m+1}$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成ではない．

(0) $X_0 = \operatorname{Spec} R$ とおく．
(1) $X_1 \to X_0$ を閉点でのブローアップとする．その例外因子を E_1 とすると $E_1 \simeq \mathbb{P}^2$. この中に $x^2z + xy^2 + y^3 = 0$ で定義される曲線 C をとる．
(2) $X_2 \to X_1$ を C 上の点 $(1,0,0)$ でのブローアップとする．E_2 を例外因子，C_2 を C の狭義変換とする．
(3) $X_3 \to X_2$ を $E_2 \cap C_2$ でのブローアップとする．E_3 を例外因子，C_3 を C_2 の狭義変換とする．
$\vdots$
(n) $X_n \to X_{n-1}$ を $E_{n-1} \cap C_{n-1}$ でのブローアップとする E_n を例外因子，C_n を C_{n-1} の狭義変換とする．

この操作で $n \geq 10$ とし，$v = \mathrm{val}_{E_n}$ とすれば，gr_vR は有限生成ではない．

この例において、どの関数の値を決めれば (我々の意味で) 附値が決まるかを見ると，$v(x) = n-1, v(y) = n, v(z) = n+1, v(x^2z + xy^2 + y^3) = 4(n-1)$ によって v が決まる．

3. トーリック附値

まずは多様体の特異点解消に対して「相対的 Mather 標準因子」を定義しよう．これが定義され得るためには特異点解消が Nash ブローアップを経由していなければならない．$\nu : \widehat{X} \to X$ を Nash ブローアップとする．つまり $\widehat{X} \subset \mathbb{P}(\wedge^n \Omega_X)$ を $\mathbb{P}(\wedge^n \Omega_{X_{reg}})$ の閉包とする．可逆層

$$\widehat{\mathcal{K}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\wedge^n \Omega_X)}(1) \mid_{\widehat{X}}$$

を Mather 標準層と呼ぶ．

Definition 3.1. $f : Y \to X$ を $f = \nu \circ \widehat{f} : Y \to \widehat{X} \to X$ と分解する特異点解消とする．Y 上の f に関する例外集合に台をもつ因子 $\sum a_i E_i$ が次を満たすとき 相対 Mather 標準因子と呼び，$\widehat{K}_{Y/X}$ と書く．

$$\mathcal{O}_Y(\sum a_i E_i) \simeq \mathcal{O}(K_Y) \otimes \widehat{f}^* \widehat{\mathcal{K}}^{-1}.$$

このとき a_i を $\widehat{k}_{E_i}(X)$ と書く．

Proposition 3.2. 任意の例外素因子 E_i に対して $\widehat{k}_{E_i} \geq 0$. 従って X が *Gorenstein* 多様体のとき食い違い指数 *(discrepancy)* とは異なるものとなる．

Theorem 3.3. 因子的附値 $v = q \cdot \mathrm{val}_E$ に対し，極大因子的集合 $W(v)$ の余次元は有限になりその値は

$$\operatorname{codim}_{X_\infty} W(v) = q(\widehat{k}_E(X) + 1)$$

で表される．

この定理の系として次が得られる．

Corollary 3.4 (非特異の場合). $v = q \cdot \mathrm{val}_E$ を $\mathbb{C}^n$ の原点を中心に持つ因子的附値とする．$x_1, \ldots, x_n$ を座標関数とする．

$$\sum_{i=1}^{n} v(x_i) \geq q(\widehat{k}_E(X) + 1)$$

が成立しているとき，v はトーリック附値である． またこのトーリック附値は $(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in N \cap \sigma$ によって決まる．ここで，[F] の記号の使い方に従い，$N \simeq \mathbb{Z}^n$, $\sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ は $\mathbb{C}^n$ を定義する錐を表す．

なお、非特異の場合 $\widehat{k}_E(X)$ が食い違い指数になることに注意すれば，この系は直接初等的な方法でも証明できる ([K]). これを教えてくださった Kaledin 氏に感謝する．

Theorem 3.5 (一般の場合). $X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ を n 次元錐 $\sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ によって定義される n 次元アファイントーリック多様体，$v = q \cdot \mathrm{val}_E$ を原点（閉軌跡）を中心とする因子的附値とする．次のような $a \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ が存在したとする：

$$q(\widehat{k}_E(X) + 1) \leq \min_{\{x_1,\ldots,x_n\} \subset \sigma^\vee \cap M} \left\{ \sum_i \langle x_i, a \rangle \right\}$$

ここで $\{x_1, ..., x_n\}$ は線形独立なものすべてを動くとする．さらに，$\sigma^\vee \cap M$ のある生成系 $\{u_1, ..., u_r\}$ に対して

$$v(u_j) \geq \langle u_j, a \rangle.$$

このとき，v は $a \in \sigma \cap N$ によって決まるトーリック附値である．

References

[B] V. Batyrev, *Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs.* J. Eur. Math. Soc. **1** (1999), 5–33.

[CGP] V. Cossart, C. Galindo and O. Piltant, *Un exemple effectif de gradué non noethérien associé à une valuation divisorielle.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **50** (2000), 105–112.

[DEI] T. De Fernex, L. Ein and S. Ishii, *Divisorial valuations via arcs*, preprint (2007) math.AG/0701867, to appear in Publ. RIMS **44** (2008)

[DL] J. Denef and F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration.* Invent. Math. **135** (1999), 201–232.

[ELM] L. Ein, R. Lazarsfeld and M. Mustaţă, *Contact loci in arc spaces.* Compositio Math. **140** (2004), 1229–1244.

[EM1] L. Ein and M. Mustaţă, *Inversion of adjunction for local complete intersection varieties.* Am. J. Math. **126** (2004), 1355–1365.

[EM2] L. Ein and M. Mustaţă, *Jet schemes and singularities.* Math. AG/0612862v1.

[F] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[K] D. Kaledin, *McKay correspondence for symplectic quotient singularities* Invent. Math. 148, No.1, (2002) 151-175.

[Ko] M. Kontsevich, *Motivic integration.* Lecture at Orsay, 1995.

[I1] S. Ishii, *The arc space of a toric variety.* J. Alg. **278** (2004), 666–683.

[I2] S. Ishii, *Arcs, valuations and the Nash map*, J. reine angew. Math. **588** (2005), 71–92.

[I3] S. Ishii, *Maximal divisorial sets in arc spaces.* Preprint, to appear in the Proceeding of Algebraic Geometry in East Asia 2005.

[ML] S. MacLane, *A construction for absolute values in polynomial rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363–395.

[M1] M. Mustaţă, *Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities,* with an appendix by David Eisenbud and Edward Frenkel. Invent. Math. **145** (2001), 397–424.

[M2] M. Mustaţă, *Singularities of pairs via jet schemes.* J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 599–615.

[N] J. F. Nash, *Arc structure of singularities.* A celebration of John F. Nash, Jr. Duke Math. J. **81** (1995), 31–38.